

LA SIMMETRIA PROIBITA

Penrose, Shechtman e un improbabile ordine

Nel 1961 un logico cinese-americano di nome Hao Wang si pose una domanda che sembrava pura pedanteria. In realtà tocca un problema che accompagna i geometri da quando gli uomini hanno cominciato a costruire città e rivestirne pavimenti e pareti. Immaginiamo di avere un insieme di piastrelle di forme assegnate, e di volerne ricoprire un pavimento grande magari infinito, senza buchi e senza sovrapposizioni. Domanda: se un insieme di piastrelle riesce a coprire il piano, riuscirà sempre a farlo anche in modo *regolare*, cioè con un motivo che si ripete, come la carta da parati, come le mattonelle di una cucina?

Wang intuiva dentro di sé di sì, gli sembrava ovvio perché se un insieme di tessere funziona, prima o poi il disegno deve chiudersi su se stesso e ricominciare, ovvio no? No.

Tre anni dopo un suo studente, Robert Berger, dimostrò che si sbagliava. Esistono insiemi di piastrelle che coprono il piano intero e che, per una necessità matematica insuperabile, non possono farlo in modo periodico. Il motivo non si ripete mai. Non perché abbiamo ingaggiato un piastrellista poco professionale ma perché è impossibile.

L'insieme trovato da Berger ne conteneva ventimilaquattrocentoventisei.

Cominciò allora una caccia curiosa e quasi sportiva che occupò i geometri per un decennio: ridurre quel numero. Berger stesso scese a centoquattro. Donald Knuth arrivò a novantadue. Raphael Robinson, nel 1971, portò il record a sei.

E qui scende in campo Roger Penrose.

Due tessere

Penrose non era un piastrellista. È un matematico di Oxford, è vivo, e nel 2020 ha ricevuto il Nobel per la fisica per i suoi contributi alla relatività generale e i buchi neri. Alle tassellature arrivò per una via che lui stesso ha descritto come estetica prima che tecnica: gli piacevano, ci giocava, disegnava figure sui margini. Era di famiglia: con suo padre Lionel, genetista, aveva pubblicato nel 1958 il triangolo impossibile e la scala che sale all'infinito, le figure che Escher avrebbe poi reso celebri. Passavano le serate a inventare oggetti che non possono esistere.

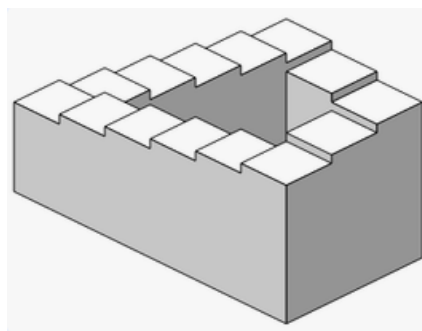
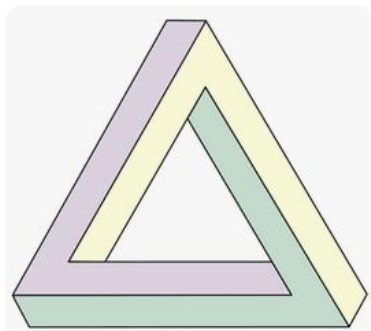


Immagine da Wikipedia

Nel 1974 pubblicò un lavoro in cui il numero scendeva a due.

Due sole forme. Nella versione più celebre si chiamano *aquilone* e *dardo*, e si ottengono entrambe tagliando un rombo, uno dei rombi che si ricavano dalla stella a cinque punte. L'aquilone è convesso e sembra proprio un aquilone da bambini; il dardo è una punta di freccia, rientrante. Sono figure che si possono ritagliare nel cartoncino in cinque minuti.

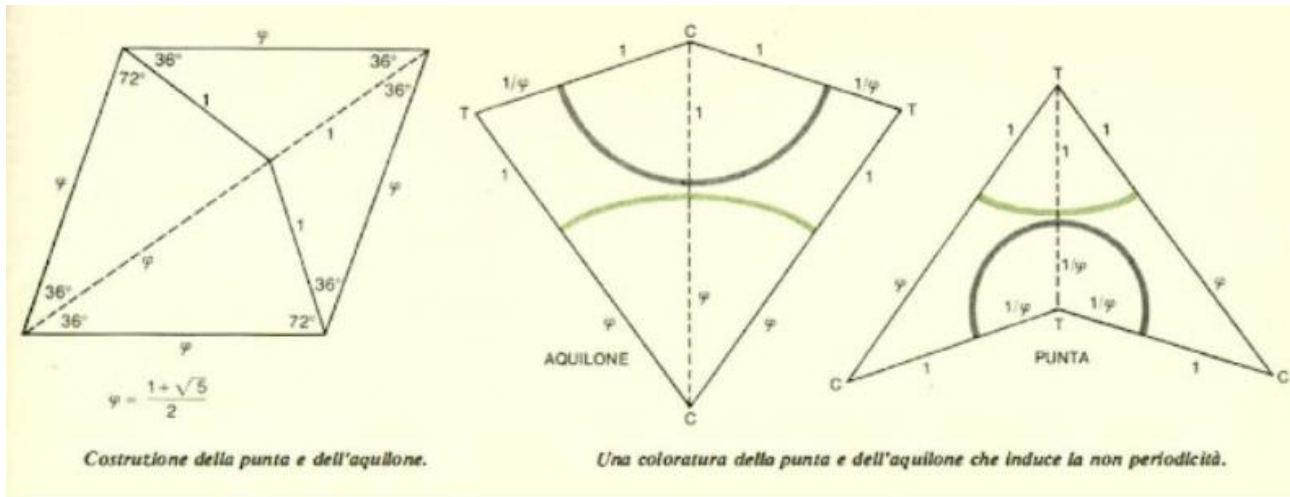


Immagine da Zibaldone scientifico

Con quelle due tessere, e solo con quelle, si copre il piano infinito. Sempre. E mai in modo periodico.

A dire il vero le due forme, prese da sole, si potrebbero accostare anche in modo ripetitivo: basta unirle a formare rombi e affiancare i rombi come mattonelle. Ciò che rende l'insieme aperiodico sono le regole di accostamento che ci siamo dati: due archi di colore diverso disegnati su ciascuna tessera, che devono proseguire senza interruzione da una tessera all'altra. Oppure, in modo equivalente e più concreto, si possono modificare i bordi con incastri e sporgenze, così che le combinazioni vietate siano fisicamente impossibili.

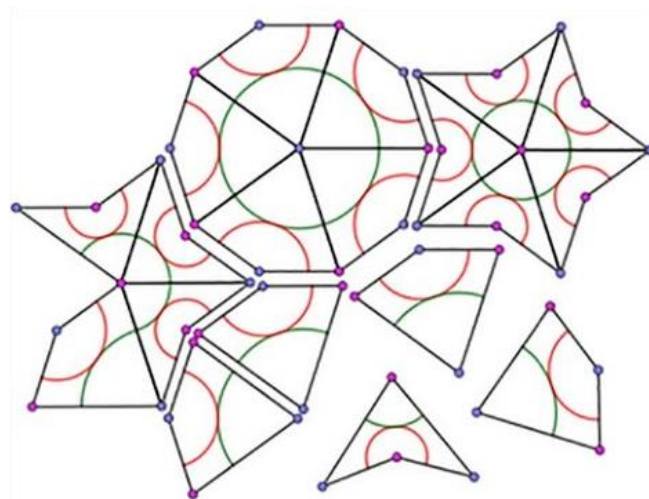


Immagine da Wikipedia

Con quelle regole il piano si può coprire in infiniti modi diversi, infiniti nel senso più forte del termine, perché ne esiste una quantità non numerabile. E nessuno di essi si ripete.

Che cosa significa "non si ripete"

La parola *periodico* nasconde una precisione formale che nel linguaggio comune si perde.

Una figura è periodica se esiste uno spostamento, una traslazione, un movimento in linea retta senza rotazioni, che la riporta esattamente su se stessa. La carta da parati è periodica: spostatela di venti centimetri verso destra e ritrovate lo stesso disegno. Il pavimento di una cucina è periodico. Il fregio di un tempio greco è periodico.

Una tassellatura di Penrose non ammette nessuna traslazione di questo tipo. Nessuna, in nessuna direzione, di nessuna lunghezza. Il disegno non torna mai su se stesso.

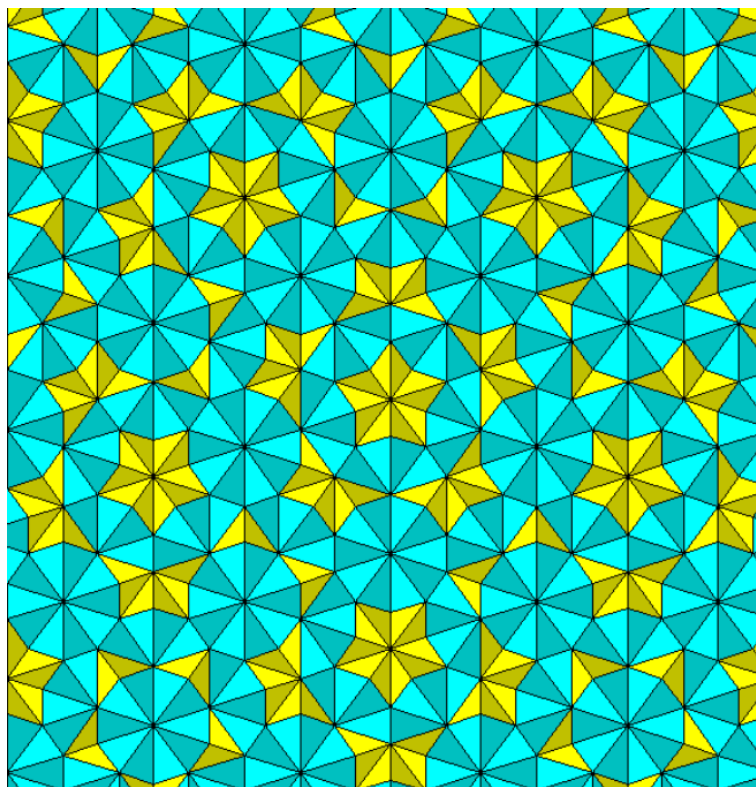


Immagine da Wikipedia

Ma, e questo è il punto che rende la cosa affascinante invece che semplicemente strana, non è affatto un disegno caotico. È ordinatissimo, e lo è in tre modi che vale la pena distinguere:

- **Primo: l'ordine locale è ferreo.** Ogni tessera è posata secondo regole che non ammettono deroghe. In ogni punto, le configurazioni possibili sono in numero finito e classificabile: Attorno a ogni vertice, le configurazioni ammissibili sono finite e rigorosamente determinate: non c'è nulla di arbitrario.

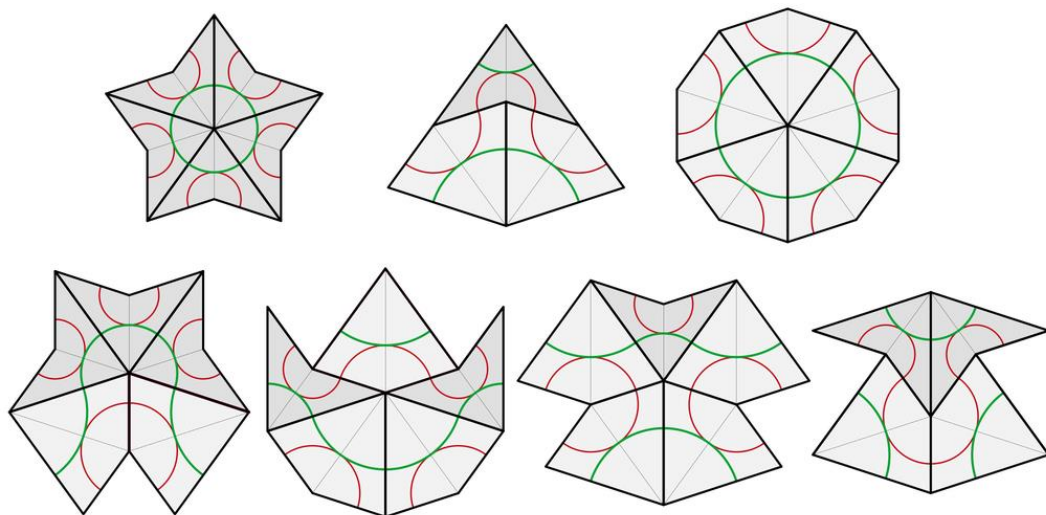


figura di Geometry guy, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

- **Secondo: ogni configurazione si ripete infinite volte.** Prendete una qualunque porzione finita della tassellatura, grande quanto volete, un metro quadrato, un chilometro quadrato. Quella identica configurazione ricompare, altrove nel piano, infinite volte. E la si ritrova a distanza non troppo grande: c'è una regola precisa che dice quanto lontano bisogna al massimo cercare. Dunque ogni cosa si ripete, ma il *tutto* non è mai traslabile su se stesso. Ordine locale ovunque, ripetizione globale mai.
C'è un corollario interessante: due tassellature di Penrose diverse sono *localmente indistinguibili*. Se ne vedete un frammento, per quanto grande, non potete stabilire da quale delle infinite tassellature provenga. Il frammento appare in tutte.

- **Terzo: c'è una simmetria, ma non è quella che cercavamo.** Le tassellature di Penrose non hanno simmetria di traslazione. Hanno però simmetrie rotazionali locali di ordine cinque, attorno a certi punti la figura si ripete ruotando di settantadue gradi, e soprattutto possiedono una simmetria che nessuna carta da parati possiede: la simmetria di scala. Raggruppando le tessere in gruppi più grandi secondo una regola precisa, si ottiene un'altra tassellatura di Penrose, con tessere ingrandite di un fattore fisso. E si può ripetere all'infinito, in entrambe le direzioni: verso il grande e verso il piccolo. La struttura si riconosce a ogni scala.



Immagine da Wikipedia

Il fattore di ingrandimento è ϕ , la sezione aurea, il numero $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618$.

E la sezione aurea è dappertutto, in queste figure. Il rapporto fra i lati delle tessere è ϕ . Le regole di accostamento la contengono. E, dettaglio che useremo per la dimostrazione, in ogni tassellatura di Penrose infinita il rapporto fra il numero di aquiloni e il numero di dardi è esattamente ϕ .

Esattamente ϕ . Che è un numero irrazionale. Tenete a mente questo fatto: vale tutta la dimostrazione.

Otto anni dopo, a Washington

L'8 aprile 1982, nel laboratorio del National Bureau of Standards a Washington, un metallurgista israeliano quarantunenne guardava dentro un microscopio elettronico.

Si chiamava Dan Shechtman, era in America per un periodo di ricerca, e stava studiando leghe di alluminio e manganese raffreddate molto rapidamente. Il metodo consiste nel far solidificare il metallo fuso in una frazione di secondo, così in fretta che gli atomi non hanno il tempo di sistemarsi nelle posizioni ordinate che assumerebbero normalmente.

Shechtman puntò il fascio di elettroni sul campione e osservò la figura di diffrazione ovvero il disegno di punti luminosi che si forma quando gli elettroni attraversano la materia e ne rivelano la struttura interna.

Non poteva credere ai suoi occhi.

I punti erano nitidi, brillanti, perfettamente definiti e mostravano il segno inequivocabile di una struttura ordinata; non avevano nulla di un vetro o di un solido amorfo. E disponevano in dieci raggi, in una simmetria decagonale dieci punte, come una stella marina raddoppiata.

Sul quaderno di laboratorio, quel giorno, Shechtman scrisse tre punti interrogativi: *10 Fold???*

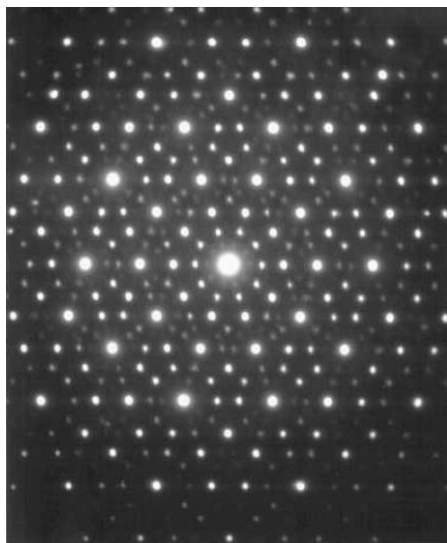


Immagine gentilmente concessa da Ron Lifschitz (Caltech)

Perché era impossibile

Per capire perché quei tre punti interrogativi valevano un Nobel, bisogna sapere cosa la cristallografia aveva stabilito con certezza, e stabilito bene, con una dimostrazione corretta che nessuno ha mai confutato.

Nella concezione classica della cristallografia, un cristallo era identificato con una struttura periodica e questa identificazione funzionò così bene da diventare quasi invisibile. Sale da cucina, quarzo, diamante: tutti reticoli periodici. È questa periodicità a produrre le facce piane, gli angoli costanti, i punti nitidi nella diffrazione.

Ora, un reticolo periodico può possedere alcune simmetrie rotazionali e non altre. Se ruotate un reticolo periodico di mezzo giro, o di un terzo di giro, o di un quarto, o di un sesto, potete ritrovarlo identico. Di un quinto di giro, mai.

Questo è il *teorema della restrizione cristallografica*, ed è consolidato. La ragione, in fondo, è la stessa per cui non si può pavimentare un bagno con piastrelle a forma di pentagono regolare: i pentagoni non si incastrano, restano sempre dei vuoti. Cinque non va d'accordo con la ripetizione.

L'analogia con il pentagono aiuta a intuire il problema, ma il teorema è più generale: una struttura periodica bidimensionale può avere soltanto simmetrie rotazionali di ordine 2, 3, 4 o 6.

E le simmetrie possibili in un cristallo sono 2, 3, 4, 6. Una struttura periodica non può possedere simmetria rotazionale di ordine 5 o 10. Proibita per teorema, non per convenzione.

Shechtman aveva davanti agli occhi un solido che diffrangeva come un cristallo e mostrava una simmetria che i cristalli non possono avere.

Il prezzo da pagare

Provò a raccontarlo, e la reazione fu brutale.

I colleghi gli dissero che aveva evidentemente sbagliato qualcosa. Che si trattava di *geminazione*: più cristalli normali cresciuti insieme in orientazioni diverse, che nell'insieme simulano una simmetria che nessuno di loro possiede. È una spiegazione seria, e Shechtman ovviamente la verificò e la escluse.

Il responsabile del suo gruppo gli mise in mano un manuale di cristallografia e gli suggerì di rileggerselo. Poi gli chiese di lasciare il gruppo di ricerca, perché, sono parole testuali, stava mettendo in imbarazzo tutti.

Passarono due anni prima che riuscisse a pubblicare le sue ricerche e il primo articolo fu respinto. Uscì quindi nel novembre 1984 su *Physical Review Letters*, firmato con Ilan Blech, Denis Gratias e John Cahn, quest'ultimo, all'inizio, tra i più scettici.

E allora arrivò l'attacco che pesò più di tutti.

Linus Pauling era l'uomo più autorevole della chimica mondiale. Aveva vinto il Nobel per la chimica nel 1954 per i suoi lavori sul legame chimico, e possedeva un'autorità che nessun altro chimico vivente poteva vantare. Dichiarò pubblicamente, in più occasioni e davanti a platee di colleghi, che i quasicristalli non esistevano e coniò la frase che avrebbe perseguitato Shechtman per anni: non esistono i quasicristalli, esistono i quasi-scientziati.

Sostenne fino alla morte, nel 1994, che si trattasse di geminazione. Aveva torto, e aveva torto contro l'evidenza sperimentale.

C'è qualcosa, in questa vicenda, che merita di essere guardato in faccia. Linus Pauling non era un reazionario né un burocrate della scienza. Era stato, per tutta la vita, un uomo dall'altra parte. Nel 1952 il governo degli Stati Uniti gli aveva ritirato il passaporto in piena caccia alle streghe maccartista, impedendogli di partecipare a un convegno scientifico a Londra. Aveva raccolto undicimila firme di scienziati contro i test nucleari, aveva combattuto per anni contro la corsa agli armamenti, e per questo nel 1962 aveva ricevuto il Nobel per la pace, unico uomo nella storia ad averne vinti due non condivisi.

Era stato, insomma, la vittima per eccellenza dell'autorità che decide cosa si può dire. E quando si trovò lui dalla parte dell'autorità, la usò esattamente allo stesso modo: per schiacciare con il ridicolo un ricercatore che poi dimostrò di aver ragione.

Non è ipocrisia, ed è per questo che la storia è istruttiva. È il modo in cui funziona il potere quando è fondato sul sapere: chiunque lo detenga tende a difendere il quadro dentro cui quel sapere è stato faticosamente costruito. Pauling non stava difendendo un interesse. Stava difendendo un mondo in cui i teoremi che conosceva descrivevano tutto ciò che esiste.

La risposta era già pronta

Il particolare più bello della storia è che la spiegazione esisteva da otto anni, e nessuno l'aveva collegata.

Alan Mackay, cristallografo a Londra, aveva fatto una cosa apparentemente oziosa: aveva preso una tassellatura di Penrose, ne aveva costruito l'analogo tridimensionale mettendo atomi ai vertici, e aveva calcolato che aspetto avrebbe avuto la sua figura di diffrazione. Il risultato, pubblicato nel 1981-82, mostrava punti nitidi disposti in simmetria decagonale.

Aveva previsto, sulla carta, proprio il tipo di figura di diffrazione che Shechtman avrebbe osservato poco dopo al microscopio. Ma erano mondi separati: un matematico che giocava con le piastrelle e un metallurgista che guardava leghe di alluminio non si leggono a vicenda.

Furono Paul Steinhardt e Dov Levine, a Filadelfia, a chiudere il cerchio pochi mesi dopo l'articolo di Shechtman. Costruirono la teoria di questi solidi ordinati e non periodici, e coniarono il nome che oggi usiamo: quasicristalli.

Un quasicristallo realizza fisicamente il tipo di ordine non periodico che le tassellature di Penrose avevano già mostrato essere matematicamente possibile. Gli atomi non stanno in

un reticolo che si ripete: stanno in una struttura che è ordinatissima, che si riconosce a ogni scala, e che non torna mai su se stessa. La simmetria di ordine cinque è proibita ai cristalli periodici, non alla materia.

Nel 1992 l'Unione Internazionale di Cristallografia fece l'unica cosa che restava da fare e cambiò la definizione di cristallo. Non più "solido con struttura periodica", ma "solido che produce una figura di diffrazione essenzialmente discreta". La definizione venne quindi riformulata in termini di proprietà osservabile nella diffrazione, includendo anche le strutture non periodiche con ordine a lungo raggio

Nel 2011 Dan Shechtman ricevette il premio Nobel per la chimica. Da solo.

Il meteorite

Restava una domanda: i quasicristalli si producono in laboratorio, in condizioni estreme e artificiali. La natura ne fa?

Paul Steinhardt, lo stesso della teoria, decise che valeva la pena cercare. Nel 2007 cominciò a passare al setaccio le banche dati mineralogiche del mondo alla ricerca di campioni con composizioni sospette. Un lavoro da archivio, con un tasso di successo prossimo allo zero.

Nel 2008 gli rispose Luca Bindi, mineralogista del Museo di Storia Naturale di Firenze. Nelle collezioni fiorentine c'era un campioncino di khatyrkite, un minerale raro a base di rame e alluminio, arrivato lì per vie non del tutto chiare e mai studiato a fondo.

Era un quasicristallo naturale. Venne chiamato icosaedrite, ed è oggi un minerale pienamente riconosciuto.

E qui la storia diventa un romanzo. Perché il campione non aveva una provenienza documentata, e senza provenienza il risultato valeva poco perché poteva essere benissimo una scoria industriale. Steinhardt e Bindi passarono due anni a ricostruire il percorso di quel granello, attraverso registri di collezionisti, corrispondenze private, canali informali aperti nel disordine del crollo dell'Unione Sovietica, testimonianze contraddittorie e intermediari di dubbia affidabilità. Un'indagine che ricorda più una vicenda poliziesca che scientifica.

Il filo li portò a un torrente della Kamčatka, nei monti Koryak, all'estremo oriente della Russia. E nell'estate del 2011 organizzarono una spedizione: geologi, un permesso difficile da ottenere, mezzi cingolati, tende, e settimane a setacciare argilla in una valle a migliaia di chilometri dalla più vicina strada asfaltata.

Trovarono altri granelli. E l'analisi rivelò l'origine: il materiale proviene da un meteorite, una condrite carbonacea formatasi ai primordi del sistema solare, oltre quattro miliardi e mezzo di anni fa, precipitata in Siberia. Il primo quasicristallo naturale mai identificato è più antico della Terra.

Steinhardt ha raccontato tutta la vicenda in un libro il cui titolo è già una tesi: *The Second Kind of Impossible*. Ma questo era impossibile solo per le regole che ci eravamo dati.

Il recinto

Fin qui è una storia di matematica e di fisica. Ma contiene una domanda che non è né dell'una né dell'altra: che cosa succede quando confondiamo un modello con ciò che il modello descrive?

Il teorema della restrizione cristallografica non è mai stato sbagliato. È corretto oggi come nell'Ottocento, la sua dimostrazione è impeccabile, e nessuno l'ha mai messa in discussione. Dice, ed è vero, che un reticolo *periodico* non può avere simmetria di ordine cinque.

Ciò che era sbagliato non era il teorema. Era l'identificazione silenziosa fra due cose diverse: fra *cristallo* e *cristallo periodico*.

Quella identificazione non era un errore di calcolo, e non era neppure, in origine, un'assunzione arbitraria ma piuttosto il frutto di un secolo e mezzo di successi. Tutti i cristalli che si erano osservati erano periodici; la periodicità spiegava le facce, gli angoli, la diffrazione, tutto. La definizione funzionava così bene che aveva smesso di apparire come una definizione. Sembrava un fatto sul mondo.

Ecco il punto. Ogni volta che tracciamo un confine per rendere qualcosa trattabile, e dobbiamo tracciarlo, perché senza definizioni non si dimostra nulla, quel confine finisce per sembrarci il bordo delle cose anziché il bordo del nostro discorso. E tanto più è stato faticoso costruirlo, tanto più quel bordo ci sembra granitico. È un recinto che smette di essere visibile a chi ci sta dentro. E quando dall'esterno arriva qualcosa che nel recinto non entra, la prima reazione non è allargare il recinto: è dichiarare che quella cosa non può esistere.

Non esistono i quasicristalli, esistono i quasi-scienziati.

Ciò che rende la vicenda esemplare è che il rimedio non fu una scoperta più profonda né uno strumento più potente. Shechtman non vide qualcosa di nascosto: vide una cosa che stava lì, nitidissima, sullo schermo di un microscopio che chiunque avrebbe potuto usare. Non gli mancava informazione, e non ne mancava alla comunità che lo derideva. Mancava il permesso di leggere quell'immagine fuori dalla cornice in cui tutti stavano leggendo.

E notate una cosa: le tassellature di Penrose esistevano da otto anni. La matematica aveva già costruito, in astratto, l'oggetto che dimostrava la possibilità. Alan Mackay aveva persino calcolato che aspetto avrebbe avuto. La risposta era stata scritta prima che la domanda venisse posta, e non è servita a nulla, perché stava dall'altra parte di un confine disciplinare che nessuno aveva ragione di attraversare. La possibilità matematica esisteva, il calcolo della diffrazione esisteva, l'osservazione sperimentale esisteva. Mancava soltanto che qualcuno riconoscesse le tre cose come una sola. Non era un problema di informazione: era un problema di connessione fra informazioni già disponibili.

Guardata da lontano, questa storia è una sequenza di identificazioni che si sciolgono, una dopo l'altra.

Penrose mostra che ordine non significa periodicità: si può essere rigorosamente ordinati senza ripetersi mai.

Shechtman mostra che un ordine non periodico non è un'impossibilità fisica: la materia lo fa davvero.

E la vicenda nel suo insieme mostra la terza, che è la più difficile da vedere: il limite di un modello non è il limite della realtà.

Torniamo allora al punto da cui siamo partiti. Era davvero proibita, la simmetria di ordine cinque? No. Era proibita in un reticolo periodico. Avevamo solo smesso di distinguere le due cose.

Non è male, per due tessere di cartoncino.

Un recentissimo epilogo

La caccia al numero minimo di tessere, quella cominciata da Berger nel 1964, non si era mai chiusa. Da due, ci si chiedeva, si può scendere a una? Esiste una piastrella singola che copra il piano solo in modo non periodico? I matematici la chiamavano *einstein*, non per il fisico, ma dal tedesco *ein Stein*, una pietra.

Per cinquant'anni nessuno l'ha trovata, e molti dubitavano che esistesse.

Nel novembre del 2022 la trovò David Smith, di Bridlington, nello Yorkshire. Tecnico tipografico in pensione, appassionato di forme geometriche, senza alcuna formazione matematica accademica. Ritagliava poligoni nel cartoncino e provava a incastrarli, per il gusto di farlo.

Trovò una figura a tredici lati, che somiglia vagamente a un cappello, e si accorse che non riusciva a farla ripetere. Scrisse a Craig Kaplan, informatico all'Università di Waterloo. Kaplan coinvolse Joseph Myers e Chaim Goodman-Strauss, e nel marzo 2023 il risultato fu annunciato: il cappello è una piastrella aperiodica singola. Pochi mesi dopo lo stesso gruppo ne trovò una seconda, battezzata *spettro*, che risolveva anche l'ultima obiezione tecnica rimasta.

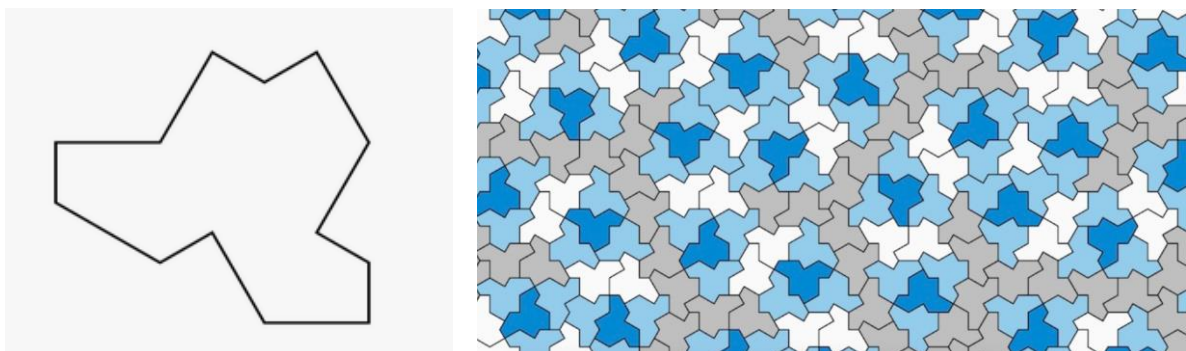


Immagine presa da Il Post

Cinquant'anni di ricerca, ventimila tessere all'inizio, una alla fine. E l'ultimo passo lo ha realizzato un tipografo in pensione con un paio di forbici.

Viene da chiedersi quante cose stiano in questo momento sotto gli occhi di qualcuno, su un tavolo, sullo schermo di uno strumento, perfettamente visibili, in attesa soltanto di qualcuno che le guardi senza sapere già che cosa deve vedere.

APPENDICE MATEMATICA

Vogliamo dimostrare che una tassellatura del piano con aquiloni e dardi, rispettata la regola di accostamento, non può essere periodica.

Passo 1 — La composizione.

Ogni tassellatura di Penrose ammette un'operazione notevole, chiamata *composizione* (o inflazione). Raggruppando le tessere secondo una regola precisa e sempre applicabile, si ottengono tessere più grandi che sono ancora aquiloni e dardi, e che formano ancora una tassellatura di Penrose legale, con lati più lunghi di un fattore φ .

Due proprietà cruciali di questa operazione sono che è sempre possibile ed è unica. Non ci sono scelte da fare: data la tassellatura, il raggruppamento è determinato. Questa unicità deriva dalla struttura locale delle configurazioni ammissibili e dalle regole di accostamento delle tessere.

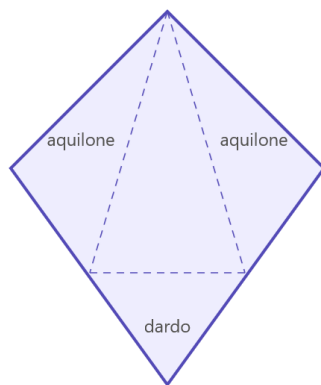
Passo 2 — La contabilità.

Applicando la composizione, si verifica che ogni aquilone del nuovo livello si forma da due aquiloni e un dardo del livello precedente, e ogni dardo si forma da un aquilone e un dardo.

Scrivendo A per il numero di aquiloni e D per quello di dardi, il passaggio da un livello al successivo è governato dalla matrice

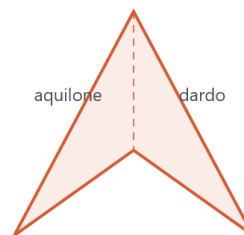
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un aquilone grande



$$= 2 \text{ aquiloni} + 1 \text{ dardo}$$

Un dardo grande



$$= 1 \text{ aquilone} + 1 \text{ dardo}$$

Le tessere composte hanno lato φ volte più lungo · da qui la matrice $[[2,1],[1,1]]$

Passo 3 — Il rapporto aureo.

Gli autovalori di M si ottengono dall'equazione $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, che dà

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

L'autovalore maggiore vale $(3+\sqrt{5})/2 = \varphi^2$, coerente con il fatto che a ogni composizione le aree si moltiplicano per φ^2 .

Iterando la composizione, il rapporto A/D converge alla direzione dell'autovettore dominante. Il calcolo dà

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{A(R)}{D(R)} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ove $A(R)$ e $D(R)$ sono i numeri di aquiloni e dardi contenuti in una regione che cresce indefinitamente. La frequenza asintotica degli aquiloni rispetto ai dardi è φ .

La teoria delle tassellature di Penrose garantisce inoltre che questa frequenza è comune a tutte le tassellature ammissibili.

Passo 4 — La contraddizione.

Supponiamo ora, per assurdo, che una tassellatura di Penrose sia periodica.

Periodica significa che esiste un reticolo di traslazioni che la lascia invariata, e dunque esiste un *dominio fondamentale*: una regione finita che, ripetuta per traslazione, genera l'intera tassellatura.

Se la tassellatura fosse periodica, esisterebbe una cella fondamentale contenente a aquiloni e d dardi. Le frequenze relative sarebbero quindi:

$$\frac{A}{D} = \frac{a}{d} \in \mathbb{Q}$$

Ma una tassellatura di Penrose ha frequenza relativa:

$$\frac{A}{D} = \frac{a}{d} \notin \mathbb{Q}$$

Che è un'ovvia contraddizione e l'ipotesi di periodicità dunque falsa.

Osservazione. Esiste una seconda dimostrazione, più geometrica, che sfrutta direttamente la composizione. Se la tassellatura fosse invariante per una traslazione di vettore $\mathbf{v}$, allora, poiché la composizione è unica e quindi non può che rispettare quella simmetria, anche tutte le tassellature composte sarebbero invariante per la stessa $\mathbf{v}$. Ma a ogni composizione le tessere crescono di un fattore φ , e dopo un numero finito di passi diventerebbero enormemente più grandi di $|\mathbf{v}|$. Una figura invariante per una traslazione più corta delle

sue stesse tessere è impossibile, perché ogni tessera dovrebbe essere mandata su una tessera distinta con cui si sovrappone.

Le due dimostrazioni sono in fondo la stessa cosa vista da due lati: l'irrazionalità di φ e la crescita per fattori φ sono il medesimo fatto.

Riferimenti bibliografici e letture consigliate

Luca Bindi, *Quasicristalli. L'avventura di una scoperta*, Tab edizioni, Roma 2021, dove l'autore, mineralogista fiorentino, racconta la vicenda dell'identificazione del primo quasicristallo naturale nelle collezioni del Museo di Firenze e che ha poi partecipato alla spedizione in Kamčatka. Testo per un pubblico di lettori non specialisti, unisce il contenuto scientifico all'avventura.

Paul J. Steinhardt, *La seconda specie di impossibile. La straordinaria ricerca di una nuova forma di materia*, Bollati Boringhieri, Torino 2019, per il racconto dell'intera vicenda dal punto di vista del fisico che l'ha guidata, dalla teoria dei quasicristalli fino al recupero del meteorite.

Piergiorgio Odifreddi, *C'era una volta un paradosso. Storie di illusioni e verità rovesciate*, Einaudi, Torino 2001, per il contesto più ampio dei risultati matematici che contraddicono l'intuizione, utile a chi voglia collocare la vicenda in un quadro generale.

Branko Grünbaum e Geoffrey C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman, New York 1987, trattazione sistematica delle tassellature, delle regole di accostamento e delle configurazioni di vertice.

Alan L. Mackay, *Crystallography and the Penrose Pattern*, *Physica A* 114 (1982), pp. 609-613, per il calcolo della figura di diffrazione associata al pattern di Penrose, che mostrò quanto una struttura aperiodica potesse produrre un ordine diffrattivo compatibile con l'idea di quasicristallo.

Roger Penrose, *Pentaplexity: A Class of Non-Periodic Tilings of the Plane*, *The Mathematical Intelligence* (1979), 32–37, per la parte matematica della costruzione.

Roger Penrose, *The Role of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research*, *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications* 10 (1974), pp. 266-271, per la presentazione della tassellatura aperiodica di Penrose e della riflessione dell'autore sul ruolo dell'estetica nella ricerca matematica.

Dan Shechtman, Ilan Blech, Denis Gratias e John W. Cahn, *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*, *Physical Review Letters* 53 (1984), pp. 1951-1953, per la scoperta sperimentale dei quasicristalli.

Risorse varie online, *Tassellatura di Penrose*, *Quasicristallo* e *Roger Penrose* in Wikipedia italiano, ben sviluppate tecnicamente e contengono le illustrazioni, comprese quelle sui rombi di Penrose e sulla loro derivazione dai triangoli aurei.

Articolo scritto da Pier Paolo Conti nel Settembre 2025

Seguici su Face Book alla pagina **DELOS e ADELOS**



Iscriviti per farla crescere!

Oppure su Whatsapp 

3348141080